

文章编号: 1000-8055(2000)02-0124-05

LU - AU SM PW 混合格式在可压缩无粘和粘性流动数值分析中的应用

赵兴艳¹ 苏莫明² 苗永森¹

¹(西安交通大学 流体机械系, 陕西 西安 710049)

²(西北工业大学 航空发动机系, 陕西 西安 710072)

摘要: 本文首先将AU SM PW 格式与三阶MU SCL 格式融合, 给出了其在任意曲线坐标下的三维形式, 并将其与LU - SGS 格式结合, 应用于可压缩 Euler 和 Navier- Stokes 方程的求解。其次, 构造了一种新的通量限制器。最后, 为了验证LU - AU SM PW 混合格式的性能, 将平面叶栅跨音速无粘流动以及喷管超音速粘性流动作为算例。本文计算结果与文献计算结果和实验数据相符很好, 表明采用LU - AU SM PW 混合格式数值模拟可压缩流场, 具有较高的计算精度、较快的收敛速度和良好的稳定性。

关键词: 计算流体力学; 可压缩流动; 曲线坐标; 激波

中图分类号: O 354

文献标识码: A

1 引言

文献[1]融和 FVS (Flux Vector Splitting) 格式和 FDS (Flux Difference Splitting) 格式的优点, 提出了 AU SM (Advective Upwind Splitting Method) 格式, 并且相继提出了其改进的AU SM⁺ 格式^[2]。当采用AU SM⁺ 格式对激波流场进行数值模拟时, 会在激波附近出现数值过跳和在对流速度或压力梯度较小的区域产生数值振荡。于是, 文献[3]提出了AU SM PW (AU SM by Pressure-Based Weight Functions) 格式。该格式是在AU SM⁺ 格式的基础上, 通过引入基于压力的加权函数, 修正界面数值通量, 以避免或减弱上述不良现象。

在可压缩 Euler 方程和 Navier- Stokes 方程的数值计算中, 广泛应用隐式时间推进法, 但由于该方法要进行矩阵求逆, 需要较多计算机内存和计算时间。在以前LU 格式的基础上, Yoon 和 Jameson^[4]提出了LU - SGS 格式, 该格式不需要进行矩阵求逆, 提高了收敛速度。本文旨在综合利用AU SM PW 格式与LU - SGS 格式的优点, 并

将其混合格式推广应用于三维可压缩无粘和粘性流动数值分析中。

2 数值方法

2.1 控制方程组

在任意曲线坐标系中, 三维 Navier- Stokes 方程可表述为:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i^C}{\partial \xi_i} + \frac{\partial F_i^V}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

其中 q , F_i^C 和 F_i^V 的定义参见文献[5]。

2.2 差分格式

将一维AU SM PW 格式^[3], 扩展到三维任意曲线坐标系下, 其在 ξ 方向形式如下所述, 在 η 和 ζ 方向按同样方式处理。

单元界面处的马赫数和音速的定义分别为:

$$m_{i+1/2,j,k} = M_L^+ + M_R^- \quad (2)$$

$$c_{i+1/2,j,k} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R) \quad (3)$$

其中 $\tilde{c} = \frac{c^*}{\max(|U|, c^*)}$, $c^* = \sqrt{\frac{2H(Y-1)}{Y+1}}$

注: 下标 L 表示 (i, j, k) 节点, 下标 R 表示 $(i+1, j, k)$ 节点。

收稿日期: 1999- 06- 28; 修订日期: 1999- 09- 13

作者简介: 赵兴艳(1967-), 男, 西安交通大学流体机械系, 博士生

$$M^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{(M+1)^2}{4} \pm \beta(M^2 - 1)^2 & |M| \leq 1 \\ \frac{M+|M|}{2} & |M| > 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$p^{\pm} = \begin{cases} (M \pm 1)^2 \frac{2 \mp M}{4} \pm \alpha M (M^2 - 1)^2 & |M| \leq 1 \\ \frac{1 + \text{sign}(M)}{2} & |M| > 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$M = \frac{U}{|\nabla \xi| \cdot C_{i+1/2,j,k}}, \quad \alpha = \frac{3}{16}, \quad \beta = \frac{1}{8}$$

$$F_{i+\frac{1}{2},k} = \begin{cases} J \left\{ |\nabla \xi|_{C_{i+\frac{1}{2},j,k}} [(1+f_L)M_L^+ F_L^{(c)} + (1+f_R)M_R^- F_R^{(pw)}] + p_L^+ F_L^{(p)} + p_R^- F_R^{(p)} \right\} m_{i+\frac{1}{2},k} \geq 0 \\ J \left\{ |\nabla \xi|_{C_{i+\frac{1}{2},j,k}} [(1+f_L)M_L^+ F_R^{(pw)} + (1+f_R)M_R^- F_R^{(c)}] + p_L^+ F_L^{(p)} + p_R^- F_R^{(p)} \right\} m_{i+\frac{1}{2},k} < 0 \end{cases}$$

其中

$$F^{(c)} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho H]^T, \quad F^{(p)} = \left[0, \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot p, \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot p, \frac{\partial \xi}{\partial z} \cdot p, 0 \right]^T$$

$$F_L^{(pw)} = \begin{bmatrix} pw(\rho_L, \rho_R) \\ pw(\rho_L u_L, \rho_R u_R) \\ pw(\rho_L v_L, \rho_R v_R) \\ pw(\rho_L w_L, \rho_R w_R) \\ pw(\rho_L, \rho_R) H_L \end{bmatrix}, \quad F_R^{(pw)} = \begin{bmatrix} pw(\rho_R, \rho_L) \\ pw(\rho_R u_R, \rho_L u_L) \\ pw(\rho_R v_R, \rho_L v_L) \\ pw(\rho_R w_R, \rho_L w_L) \\ pw(\rho_R, \rho_L) H_R \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中

$$pw(x, y) = (1-w) \cdot x + w \cdot y, \quad w = 1 - \min(p_L/p_R, p_R/p_L)$$

$$f_{L,R} = \begin{cases} \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1 \right) pl(p_{L,R}, p_{R,L}) \cdot |M_{L,R}^{\pm}|_{\beta=0} \cdot \min \left(1, \left(|\vec{V}_{L,R}|/C_{1/2} \right)^{0.25} \right) & |M_{L,R}| \leq 1 \\ 0 & |M_{L,R}| > 1 \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}, \quad p_s = p_L^+ p_L + p_R^- p_R$$

$$pl(x, y) = \begin{cases} 4 \cdot \min \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right) - 3 & \frac{3}{4} \leq \min \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right) < 1 \\ 0 & 0 \leq \min \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right) < \frac{3}{4} \end{cases} \quad (8)$$

为了提高计算精度, 本文将其与三阶精度 MU SCL 格式融合, 计算界面通量。三阶精度 MU SCL 格式的形式可参见文献[6]。该格式通过通量限制器 μ 修正界面通量, 提高计算精度, 避免数值过跳和数值振荡现象。文献[6, 7]采用了不同的通量限制器, 本文基于同样的原理, 采用不同的函数关系, 构造的通量限制器为:

$$\mu = \frac{\Delta_+ \cdot \Delta_- + |\Delta_+ \cdot \Delta_-| + \epsilon}{(\Delta_+)^2 + (\Delta_-)^2 + \epsilon} \quad (9)$$

其中, ϵ 为一小值, 取 $\epsilon = 10^{-16}$ 。

为了便于分析, 对采用文献[6, 7]和本文构造的通量限制器的 AUSMPW 格式分别标记为 AUSMPW (1), AUSMPW (2), AUSMPW (3)。

2.3 LU - SGS 格式

对式(1)进行隐式离散, 对流项采用 AUSMPW 格式离散, 粘性项采用中心差分格式离散, 并根据 Yoon 和 Jameson^[4]提出的 LU -

SGS 格式, 其离散形式可表述为:

$$(\nabla_i A_1^+ + \nabla_i A_2^+ + \nabla_i A_3^+ - A_1^- - A_2^- - A_3^-)(A_1^+ + A_2^+ + A_3^+ - A_1^- - A_2^- - A_3^-)^{-1}(\Delta_i A_1 + \Delta_i A_2 + \Delta_i A_3 + A_1^+ + A_2^+ + A_3^+) \Delta q_{i,j,k}^{n+1} = RHS_{i,j,k}^n \quad (10)$$

其中, $\Delta q_{i,j,k}^{n+1}$ 为 $n+1$ 时刻与 n 时刻求解变量差值, 即 $\Delta q_{i,j,k}^{n+1} = q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j,k}^n$; $RHS_{i,j,k}^n$ 为离散方程的右端项。 Δ_i, ∇_i 分别为 ξ 方向的向前、向后差分算子; $A_i^{\pm}$ 为:

$$A_i^{\pm} = \frac{A_i \pm \lambda I}{2}, \quad \lambda \geq \max(|\lambda_i^{(m)}|) \quad (i = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (11)$$

其中: A_i 为 Jacobian 矩阵, 且 $A_i = \partial F_i^C / \partial q_i$, $\lambda_i^{(m)}$ 为矩阵 A_i 的特征值, 且 $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \lambda_i^{(3)} = U_i$

$$\lambda_i^{(4)} = U_i + c \sqrt{g_{ii}}, \quad \lambda_i^{(5)} = U_i - c \sqrt{g_{ii}}$$

$$c \text{ 为音速, } g_{ii} = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right)^2}。$$

2.4 边界条件和收敛指标

在进口边界处, 对于亚音速流动, 给定总压、总温和气流角, 压力由内点外推得到; 对于超音速流动, 所有参数均按来流确定。在出口边界处, 对于亚音速流动, 给定背压, 其它参数均由内点外推得到; 对于超音速流动, 所有参数均由内点外推得到。在固体壁面边界处, 对于无粘流动, 速度按壁面相切条件确定; 对于粘性流动, 速度按壁面无滑移条件确定; 壁面压力由法向动量方程确定^[5]。在叶栅前、后延伸区的边界上, 全部流动参数应当满足周期性边界条件。

残差 R 定义式为:

$$R(N) = \left(\frac{\sum_{i=2}^{I_{\max}-1} \sum_{j=2}^{J_{\max}-1} \sum_{k=2}^{K_{\max}-1} (\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n)^2}{(I_{\max}-2)(J_{\max}-2)(K_{\max}-2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中: $I_{\max}, J_{\max}, K_{\max}$ 分别为 ξ, η, ζ 方向的最大节点数, N 为迭代次数。

令 $K = \lg_{10} [R(N)/R(1)]$, 当 $K \leq -4.0$ 时, 认为达到收敛。

3 算例与计算结果分析

在三维情况下, 高马赫数的内流或叶栅流动的实验数据很少, 因此特选取下述三个有数值结果或实验数据的典型二维流动问题作为算例, 以检验 LU - AUSMPW 混合格式模拟可压缩流场的可行性和有效性。

3.1 双圆弧平面叶栅的跨音速和超音速流动

该算例目的在于考查 LU - AUSMPW 混合格式的稳定性和收敛性以及激波的分辨率。双圆弧平面叶栅主要几何参数和网格节点数及网格分布均与文献[8]相同。计算时粘性部分取为零。

(1) 比较采用三阶精度的 MU SCL 格式对 AUSMPW 格式性能的影响。跨音速流动时, 其沿壁面马赫数分布如图 1(a) 所示, 收敛史如图 2(a) 所示。图 1(a) 表明, AUSMPW 格式与三阶精度的 MU SCL 格式融合, 计算精度明显提高, 尤其对激波的捕捉能力增强。

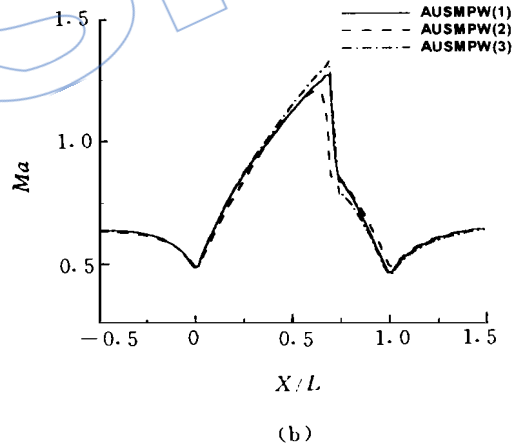
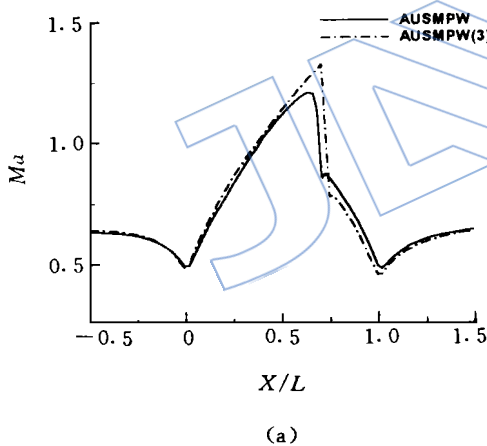


图 1 沿壁面马赫数分布 ($M_{in} = 0.675$)

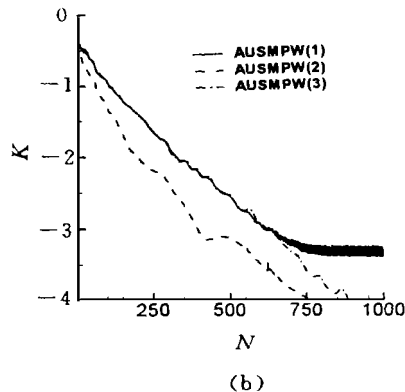
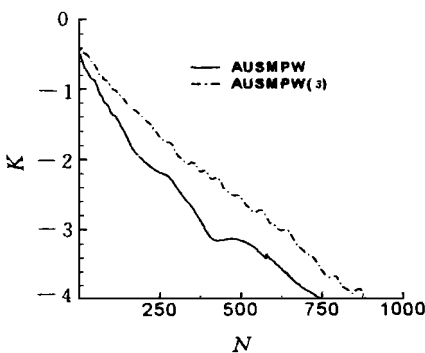


图 2 收敛史 ($M_{in} = 0.675$)

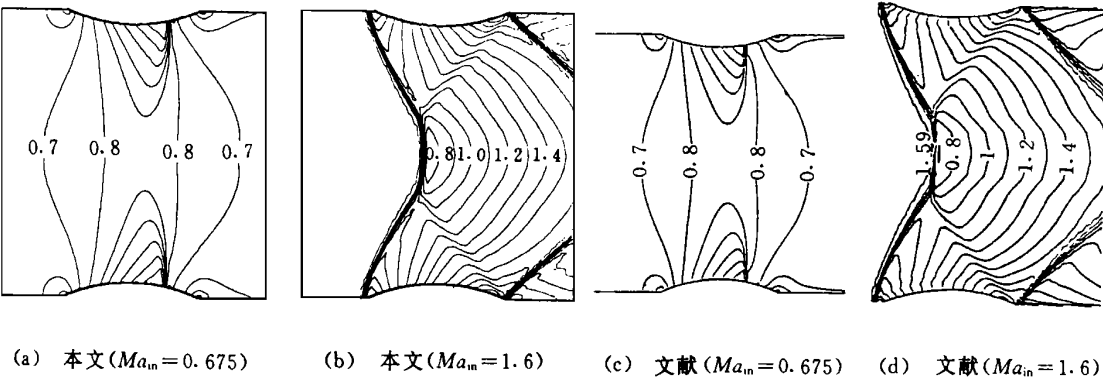


图 3 马赫数分布

(2) 比较采用不同的通量限制器采用对 AU SMPW 格式性能的影响。跨音速流动时, 其沿壁面马赫数分布如图 1(b) 所示, 收敛史如图 2(b) 所示。AU SMPW (1) 和 AU SMPW (3) 对激波的分辨率高于 AU SMPW (2), AU SMPW (3) 又略高于 AU SMPW (1); AU SMPW (2) 收敛最快, AU SMPW (1) 和 AU SMPW (3) 收敛速度接近, 但当残差降到某一水平以后, AU SMPW (3) 比 AU SMPW (1) 收敛快。可以说, AU SMPW (3) 的综合性能(激波分辨率、收敛速度和稳定性)比较好。

(3) LU - AU SMPW 混合格式采用本文构造的通量限制器对跨音速和超音速无粘流动进行数值模拟, 整个区域马赫数分布如图 3 所示, 计算结果与文献[8]结果相符较好。

3.2 喷管的超音速粘性流动

该算例具有马赫数变化范围较大的特点, 并且给出了实验数据。喷管的详细几何参数可参见文献[9]。网格节点数取为 $97 \times 49 \times 11$, 分别为喷管的长度、高度和宽度方向上的节点数, 网格在壁面和喉部处适当加密。

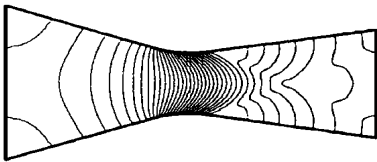


图 4 喷管中压力分布($\Delta = 0.25$)

LU - AU SMPW 混合格式采用本文构造的通量限制器, 对喷管的超音速粘性流动进行数值模拟, 喷管中压力分布如图 4 所示, 沿壁面和中心

线的压力分布以及与实验数据的比较如图 5 和图 6 所示。由比较可以看出, 本文的计算结果与实验

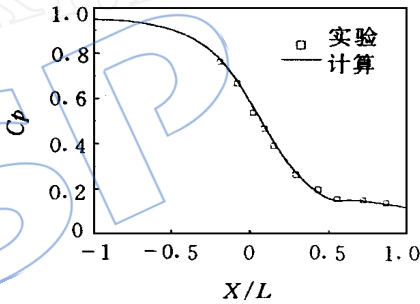


图 5 沿喷管中心线压力分布

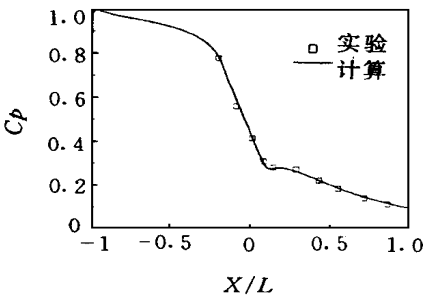


图 6 沿喷管壁面压力分布

结果相符很好。

4 结 论

本文成功地应用 LU - AU SMPW 混合格式对跨音速和超音速流动进行了数值模拟, 通过算例数值试验分析, 得到以下结论: (1) AU SMPW 格式与 MU SCL 格式结合, AU SMPW 格式的计算精度得到显著提高; (2) 通量限制器是决定整个算法性能的关键因素, 对其精确性、收敛性和稳

定性有明显影响。(3) LU-AUSMPW 混合格式采用本文构造的通量限制器求解了可压缩无粘和粘性流场, 计算结果与文献计算结果和实验数据符合得很好。

参 考 文 献

- 1 Liou M S, Steffen C J. A New Flux Splitting Scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(1): 23- 39
- 2 Liou M S. A Sequel to AUSM: AUSM⁺ [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 129(2): 364- 382
- 3 Kim K H, Joon H L, RHO O H. An Improvement of AUSM Schemes by Introducing the Pressure-Based Weight Functions [J]. Computers & Fluids, 1998, 27(3): 311- 346
- 4 Yoon S, Jameson A. Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations[J]. AIAA Journal 1988, 26(9): 1025- 1026
- 5 马铁犹 计算流体力学[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1986
- 6 Anderson W K, Thomas J L, Van L B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splitting for the Euler Equations[J]. AIAA Journal, 1986, 24(9): 1453- 1460
- 7 Gaitonde D, Shang J S. Accuracy of Flux-Split Algorithms in High-Speed Viscous Flows[J]. AIAA Journal, 1993, 31(7): 1215- 1221
- 8 Park T S, Kwon J H. An Improved Multistage Time Stepping for Second-Order Upwind TVD Schemes [J]. Computers & Fluids, 1996, 25(4): 629- 645
- 9 Mason M L, Putnam L E, Re J. The Effect of Throat Contouring on Two-Dimensional Converging-Diverging Nozzle at Static Condition[R]. NASA TN-1704, 1980

(责任编辑 杨再荣)

Numerical Analysis of Compressible Inviscid and Viscous Flows Using LU-AUSMPW Schemes

Zhao Xingyan¹, Su Moming², Miao Yongmiao¹

¹(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

²(7th Dept Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

Abstract An AUSMPW scheme in conjunction with the third-order MUSCL scheme is developed for the multidimensional hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates. The present scheme is combined with the LU-SGS Scheme for compressible Euler and Navier-Stokes equations solution. A new MUSCL limiter is proposed. The effects of the present limiter are analyzed in the aspects of efficiency, accuracy and robustness of LU-AUSMPW schemes. In order to identify the performance of LU-AUSMPW schemes, a two-dimensional transonic and supersonic inviscid flow in the cascade of two circular arc blades and a two-dimensional supersonic viscous flow in convergent-divergent nozzle are chosen as numerical examples. The accuracy of the scheme has been assessed by comparing the results with experimental data or other numerical results available in literature. It is shown that the LU-AUSMPW schemes in conjunction with present limiter possess obvious superiority in aspects of convergence rate, accuracy and robustness for calculating compressible flow fields, and there is no any spurious oscillation near the shock wave.

Key words computational fluid mechanics; compressible flow; curvilinear coordinates; shock wave